

## 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

### 3.1. Introducere

Un filtru digital este un sistem discret, utilizat în scopul modificării spectrului de amplitudini și/sau de faze al unui semnal. Sistemele (filtrele) prezentate în acest capitol vor fi liniare și invariante în timp. Răspunsul în domeniul timp al unui *SDLIT* este dat de produsul de convoluție dintre semnalul de intrare  $x[n]$  și răspunsul la impuls al sistemului, notat cu  $h[n]$ , denumit și funcție pondere:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.1)$$

Aplicarea transformatei  $Z$  ambilor membri ai relației (3.1) permite stabilirea legăturii dintre transformatele  $Z$  ale semnalelor de intrare și ieșire:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (3.2)$$

unde  $H(z)$  reprezintă *funcția de transfer* a *SDLIT*. Realizabilitatea fizică a *SDLIT* necesită stabilitatea și cauzalitatea acestuia, ceea ce implică:

$$h[n] = 0 \text{ pentru } n < 0; \quad \sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (3.3)$$

Sistemul este descris în domeniul timp prin ecuația cu diferențe finite:

$$y[n] = \sum_{i=0}^M b_i x[n-i] - \sum_{i=1}^N a_i y[n-i] \quad (3.4)$$

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Pentru *SDLIT* (filtrele) cu funcția de transfer rațională, filtrarea (evaluarea fiecărui eșantion al răspunsului) poate fi efectuată cu un număr finit de operații aritmetice – condiție de asemenea necesară pentru realizabilitatea fizică. Nu se poate utiliza produsul de convoluție (3.1), cu limita inferioară particularizată la zero, ca bază pentru implementarea soft sau hard a operației de filtrare realizată de un *SDLIT* cauzal și stabil, dacă răspunsul  $h[n]$  este de durată infinită.

Filtrele cu răspuns finit la impuls (prescurtat *RFI*) au funcția pondere  $h[n]$  nenulă pentru  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Se spune că  $N$  reprezintă lungimea răspunsului la impuls. Pentru aceste filtre implementarea operației de filtrare are la bază produsul de convoluție (3.1) particularizat corespunzător:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \quad (3.5)$$

În această situație funcția de transfer devine:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} = P(z) \text{ cu } b_i = h[i] \text{ pentru } i = \overline{0, N-1}; M = N-1 \quad (3.6)$$

Deci funcția de transfer nu prezintă poli, fiind o funcție polinomială de ordinul  $N-1$  în  $z^{-1}$ . Coeficienții  $b_i$  ai filtrului sunt chiar valorile răspunsului la impuls.

#### 3.2. Filtre *RFI* cu fază liniară

Posibilitatea filtrelor *RFI* de a avea o *caracteristică de fază liniară* permite realizarea operației de filtrare fără a introduce distorsiuni de fază, aspect important în reconstrucția fidelă a semnalelor.

Transformata Fourier a răspunsului la impuls, denumită *răspuns în frecvență* sau *funcție de transfer Fourier*, se obține prin evaluarea lui  $H(z)$  de forma (3.6) de-a lungul cercului de rază unitate din planul  $\mathbf{Z}$ :

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]e^{-jn\omega} \quad (3.7)$$

unde

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{F}{F_e} \quad (3.8)$$

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Frecvența normată  $f$  se calculează ca raportul dintre valoarea frecvenței ( $F$  exprimată în Hz) și valoarea frecvenței de eșantionare ( $F_e$  exprimată în Hz).

Funcția de transfer evaluată la frecvențe fizice, periodică în frecvență cu perioada  $2\pi$ , poate fi exprimată în forma polară:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.9)$$

unde  $|H(e^{j\omega})|$  și  $\varphi(\omega)$  sunt părți ale funcției de sistem, purtând denumirile de: *caracteristică de modul (de amplitudine)*, respectiv *caracteristică de fază*. În practică ne interesează filtrele cu coeficienți reali, adică cu  $h[n] \in R$ , conform relației (3.6). Pentru aceste filtre caracteristica de modul este o funcție pară iar cea de fază, o funcție impară, adică:

$$|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})| ; \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \quad (3.10)$$

De asemenea, de la proprietățile transformatei Fourier se știe că unui semnal  $x[n]$  par îi corespunde o transformată Fourier reală și pară iar unui semnal impar îi corespunde o transformată Fourier imaginară și impară. Presupunem acum că secvența  $h[n]$  cauzală, de lungime finită  $N$ , este obținută prin deplasarea la dreapta a unei secvențe  $h_0[n]$  anticauzale, exprimată printr-o funcție discretă pară sau impară. Rezultă imediat că în *domeniul timp* simetria sau antisimetria secvenței  $h_0[n]$  se va traduce prin simetria sau antisimetria secvenței  $h[n]$  față de axa sa centrală iar în *domeniul frecvență* deplasarea lui  $h_0[n]$  pentru a produce răspunsul cauzal  $h[n]$  va determina multiplicarea transformatei Fourier a secvenței  $h_0[n]$  cu un factor de fază liniară. În consecință filtrele *RFI* pot avea o *caracteristică de fază liniară* prin obligarea funcției pondere  $h[n]$  să prezinte proprietatea de simetrie sau de antisimetrie față de axa sa centrală. Mai mult, funcția de transfer Fourier poate fi pusă în forma:

$$H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} \quad (3.11)$$

cu  $H_0(e^{j\omega}) \in R$  și  $\theta(\omega)$  funcție liniară. Funcția reală  $H_0(e^{j\omega})$  poartă denumirea de *funcție de transfer de fază zero*, deoarece semnifică transformata Fourier a secvenței anticauzale asociate  $h_0[n]$ , transformată ce are faza nulă.

Între părțile funcției de transfer ce apar în exprimările (3.9) și (3.11) există relațiile:

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= |H_0(e^{j\omega})| \Leftrightarrow H_0(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| \\ \varphi(\omega) &= \arg\{H(e^{j\omega})\} = \theta(\omega) + \theta_0(\omega) \text{ cu } \theta_0(\omega) = \arg\{H_0(e^{j\omega})\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Se pot remarca proprietățile:

1.  $|H(e^{j\omega})|$  este funcție pară iar  $\varphi(\omega)$  funcție impară, deoarece  $h[n] \in R$ .
2. Funcțiile  $H_0(e^{j\omega})$  și  $\theta(\omega)$  sunt funcții reale, continue și derivabile.
3. Funcția  $\varphi(\omega)$  prezintă salturi de  $\pi$  radiani la frecvențele la care  $H_0(e^{j\omega})$  are treceri prin zero și deci frecvențele de rejecție pot fi citite și pe caracteristica de fază.

În proiectarea filtrelor *RFI* se preferă exprimarea funcției de transfer în forma (3.11) datorită continuității și derivabilității funcțiilor  $H_0(e^{j\omega})$  și  $\theta(\omega)$  pentru orice  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

Există 4 tipuri de filtre *RFI* cu fază liniară, în funcție de lungimea  $N$  a răspunsului la impuls și de simetria sau antisimetria acestuia:

**tipul 1:** filtre *RFI* cu lungime impară și răspuns la impuls simetric:

$$h[n] = h[N - 1 - n] \quad (3.13)$$

**tipul 2:** filtre *RFI* cu lungime pară și răspuns la impuls simetric;

**tipul 3:** filtre *RFI* cu lungime impară și răspuns la impuls antisimetric:

$$h[n] = -h[N - 1 - n] \quad (3.14)$$

**tipul 4:** filtre *RFI* cu lungime pară și răspuns la impuls antisimetric.

Centrul de simetrie sau antisimetrie al secvenței  $h[n]$  situat la  $n = (N - 1) / 2$  se găsește la mijlocul distanței dintre eșantioanele centrale pentru  $N$  par, în timp ce pentru  $N$  impar acesta este plasat pe locul eșantionului  $h[(N - 1) / 2]$ . Acesta poate avea orice valoare în cazul filtrului *RFI* de tipul 1, iar pentru tipul 3 este obligatoriu nul, cum se poate ușor constata din particularizarea condițiilor (3.13) și (3.14) pentru eșantionul cu indicele  $n = (N - 1) / 2$ .

#### 3.2.1. Proprietăți ale funcției de transfer de fază zero

Pentru cele patru tipuri de filtre *RFI* cu fază liniară se poate exprima funcția de transfer în forma (3.11) ținând cont de lungimea  $N$  a secvenței  $h[n]$ , de relația de simetrie sau de antisimetrie (3.13), respectiv (3.14), precum și de restricția referitoare la eșantionul central  $h[(N - 1) / 2]$ .

Astfel, în urma demonstrațiilor efectuate plecând de la premisele de mai sus, se pot exprima sub forma unor relații analitice funcția de transfer de fază zero  $H_0(e^{j\omega})$  și  $\theta(\omega)$  pentru cele 4 tipuri de filtre *RFI* cu fază liniară:

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

**tipul 1:** filtre *RFI* cu lungime impară și răspuns la impuls simetric:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a[n] \cos(\omega n) ; \theta(\omega) = -\omega(N-1)/2 \quad (3.15)$$

unde

$$a[0] = h[(N-1)/2] ; a[n] = 2h[(N-1)/2 - n] ; n = \overline{1, (N-1)/2} \quad (3.16)$$

**tipul 2:** filtre *RFI* cu lungime pară și răspuns la impuls simetric:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} b[n] \cos(\omega(2n-1)/2) ; \theta(\omega) = -\omega(N-1)/2 \quad (3.17)$$

unde

$$b[n] = 2h[N/2 - n] ; n = \overline{1, N/2} \quad (3.18)$$

**tipul 3:** filtre *RFI* cu lungime impară și răspuns la impuls antisimetric:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c[n] \sin(\omega n) ; \theta(\omega) = \pi/2 - \omega(N-1)/2 \quad (3.19)$$

unde

$$c[n] = 2h[(N-1)/2 - n] ; n = \overline{1, (N-1)/2} \quad (3.20)$$

**tipul 4:** filtre *RFI* cu lungime pară și răspuns la impuls antisimetric.

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} d[n] \sin(\omega(2n-1)/2) ; \theta(\omega) = \pi/2 - \omega(N-1)/2 \quad (3.21)$$

unde

$$d[n] = 2h[N/2 - n] ; n = \overline{1, N/2} \quad (3.22)$$

**Observații:**

1. Se observă că funcția de transfer de fază zero este o funcție pară pentru filtrele *RFI* cu fază liniară de **tipurile 1, 2**, respectiv impară pentru filtrele de **tipurile 3 și 4**. De asemenea  $H_0(e^{j\omega})$  elimină componenta continuă (termenii  $b[0]$ ,  $c[0]$ ,  $d[0]$ ) pentru **tipurile 2, 3, 4**.
2. Se pot verifica ușor proprietățile:

$$H_0(e^{j(\omega+2\pi)}) = \begin{cases} H_0(e^{j\omega}) ; & \text{pentru } N \text{ impar} \\ -H_0(e^{j\omega}) ; & \text{pentru } N \text{ par} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$H_0(e^{j(\omega+4\pi)}) = H_0(e^{j\omega}) \quad (3.24)$$

Relațiile (3.23) și (3.24) demonstrează că funcția de transfer de fază zero este periodică și de perioadă  $2\pi$  (ca  $H(e^{j\omega})$ ) pentru filtrele de **tipul 1 și 3**, în schimb pentru filtrele de **tipul 2 și 4**, perioada este  $4\pi$ , funcția prezentând

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

*simetrie de rotație*. Această remarcă este foarte utilă la proiectarea filtrelor, pentru impunerea corectă a condițiilor în domeniul frecvență.

3. Funcția  $H_0(e^{j\omega})$  se anulează la  $\omega=0$  pentru **tipurile 3 și 4**, respectiv în  $\omega=\pi$  pentru **tipurile 2 și 3**, indiferent de valorile coeficienților.

Cunoașterea proprietăților funcției de transfer de fază zero pentru fiecare tip de filtru *RFI* cu fază liniară este absolut indispensabilă în alegerea corectă a tipului adecvat realizării unor anumite caracteristici de filtrare. Pentru aceasta se examinează cu atenție reprezentările grafice ale funcțiilor de transfer corespunzătoare modelelor ideale de filtrare: filtru trece jos (FTJ), filtru trece sus (FTS), filtru trece bandă (FTB), filtru oprește bandă (FOB), transformator Hilbert (TRH) și diferențiator digital (DIF).

În funcție de paritatea sau imparitatea caracteristicii modelului ideal, precum și de valorile acesteia la frecvențele normate  $\omega=0$  și  $\omega=\pi$ , se decide realizarea sa printr-un anumit tip de filtru *RFI* cu fază liniară. Astfel, de exemplu, FTJ poate fi realizat cu **tipurile 1 și 2**, FTS cu **tipurile 1 și 4**, FTB cu toate tipurile, transformatorul Hilbert și diferențiatorul digital numai cu **tipurile 3 și 4**.

#### **Exemplu:**

Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului *RFI* definit prin:

$$H(z) = z^{-2} + \sqrt{3}z^{-3} + z^{-4}$$

Precizați tipul său. Să se calculeze și să se reprezinte grafic în intervalul de bază  $[-\pi, \pi)$  părțile funcției de transfer  $H(e^{j\omega})$ :  $|H(e^{j\omega})|$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $H_0(e^{j\omega})$  și  $\theta(\omega)$ .

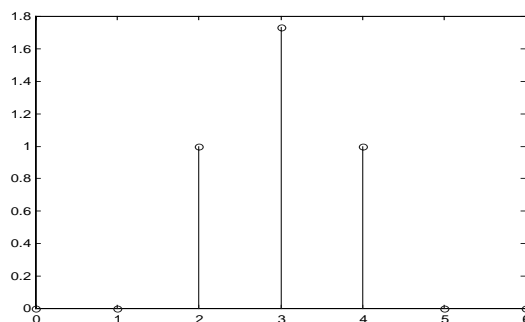
```
h=[0,0,1,sqrt(3),1,0,0];
```

```
//coeficienții funcției de transfer sunt chiar valorile răspunsului la impuls.
```

```
n=0:6;
```

```
// s-a definit suportul funcției pondere ( $n = \overline{0, N-1}$ ).
```

```
stem(n,h)
```

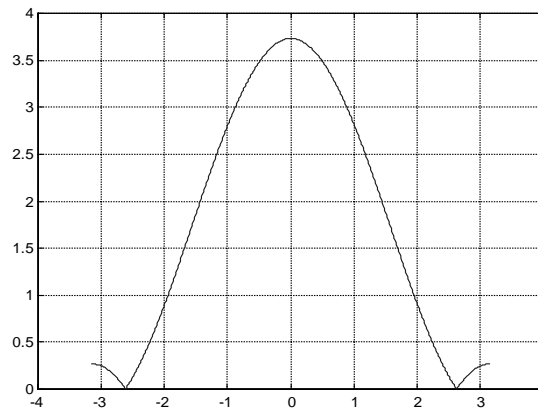


```
// se observă simetria în raport cu centrul secvenței; lungimea filtrului este N=7; rezultă că filtrul este de tipul 1.
```

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

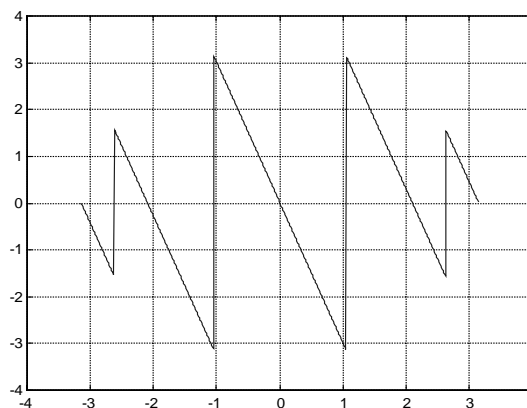
---

```
H=fft(h,512);  
w=-pi:2*pi/512:pi-2*pi/512;  
//s-a calculat transformata Fourier în 512 puncte pentru funcția pondere a  
filtrului și s-a divizat intervalul de bază în 512 puncte egal distanțate (pentru  
afișare); vezi secțiunea 2.1.3. din capitolul 2.  
plot(w,fftshift(abs(H)),grid
```



// s-a reprezentat modul funcției de transfer a filtrului  $|H(e^{j\omega})|$ ; se observă paritatea funcției.

```
plot(w,fftshift(angle(H)),grid
```



// s-a reprezentat funcția  $\varphi(\omega):[-\pi,\pi) \rightarrow [-\pi,\pi)$ ; se observă imparitatea funcției și salturile de  $\pi$  radiani la frecvențele de rejecție.

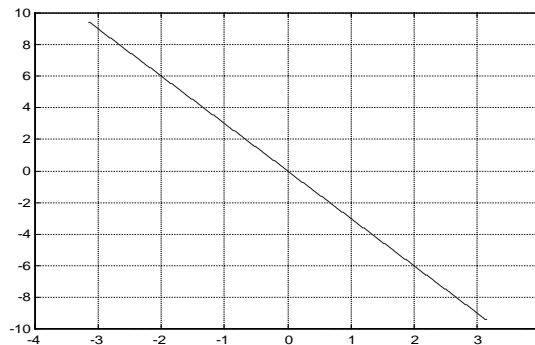
Pentru calculul părților  $H_0(e^{j\omega})$  și  $\theta(\omega)$  trebuie revăzute formulele (3.15) și (3.16) obținute în cazul filtrelor de tipul 1:

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a[n] \cos(\omega n) ; \theta(\omega) = -\omega(N-1)/2$$

$$a[0] = h[(N-1)/2] ; a[n] = 2h[(N-1)/2 - n] ; n = \overline{1, (N-1)/2}.$$

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

```
O=-w*(length(n)-1)/2;  
plot(w,O),grid
```

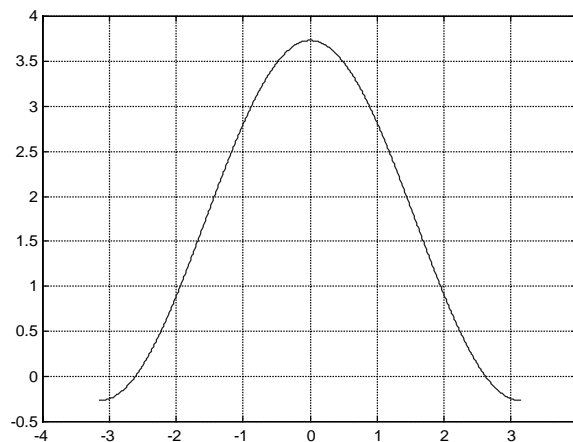


// s-a reprezentat funcția  $\theta(\omega)$ ; se observă liniaritatea caracteristicii.

Ținând cont de relația (3.11) putem reprezenta într-un mod facil funcția de transfer de fază zero  $H_0(e^{j\omega})$ :

$$H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j\omega})e^{j\theta(\omega)} \Rightarrow H_0(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})e^{-j\theta(\omega)}$$

```
H0=fftshift(H).*exp(-i*O);  
plot(w,H0),grid
```



// s-a reprezentat funcția de transfer de fază zero a filtrului; se observă veridicitatea relațiilor (3.12).

Verificați obținerea caracteristicii  $H_0(e^{j\omega})$  folosind relațiile de calcul (3.15) și (3.16).

#### **E1. Exerciții:**

Repetăți cerințele din exemplul de mai sus pentru filtrele RFI definite prin:

1.  $y[n] = x[n] - 2x[n-3] + 5x[n-5] + 5x[n-6] - 2x[n-8] + x[n-11]$

2. 
$$h[n] = \begin{cases} n & , \quad n = \overline{0,6} \\ 0 & , \quad n = 7 \\ n-14 & , \quad n = \overline{8,14} \end{cases}$$

3.  $H(z) = 0,5 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-4} + 2z^{-5} - 2z^{-6} - z^{-7} + z^{-9} - z^{-10} - 0,5z^{-11}$



### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

#### 3.2.2. Poziționarea în planul $Z$ a zerourilor funcției de transfer

Simetria sau antisimetria secvenței  $h[n]$  implică și o poziționare specifică a zerourilor funcției de transfer  $H(z)$ . Astfel, dacă în expresia (3.6) se înlocuiește  $z$  cu  $z^{-1}$ , se schimbă indicele de sumare și apoi se exploatează simetria sau antisimetria secvenței  $h[n]$ , rezultă:

$$H(z^{-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^n = \sum_{n=0}^{N-1} h[N-1-n]z^{N-1-n} = \pm z^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = \pm z^{N-1} H(z)$$

Consecințele în planul  $Z$  ale proprietății evidențiate de relația de mai sus sunt următoarele:

1. Dacă  $z_i$  este un zero al funcției  $H(z)$ , atunci și  $1/z_i$  este de asemenea un zero al acesteia;
2. Pentru aplicațiile ce prezintă interes practic, coeficienții  $h[n]$  ai polinomului  $H(z)$  sunt reali și drept urmare orice zero va fi însoțit și de complex conjugatul său. Considerând zeroul  $z_1$  exprimat în coordonate polare:  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ , atunci, în funcție de valorile razei vectoriale  $r_1$  și unghiului  $\theta_1$ , sunt posibile următoarele configurații de zerouri:

a)  $r_1 \neq 1$  ;  $\theta_1 \neq 0$  ;  $\theta_1 \neq \pi$  :

$$z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \quad ; \quad z_2 = z_1^* = r_1 e^{-j\theta_1} \quad ; \quad z_3 = 1/z_1 = (1/r_1) e^{-j\theta_1} \quad ; \quad z_4 = 1/z_2 = (1/r_1) e^{j\theta_1}$$

b)  $r_1 = 1$  ;  $\theta_1 \neq 0$  ;  $\theta_1 \neq \pi$  :

$$z_1 = e^{j\theta_1} \quad ; \quad z_2 = z_1^* = 1/z_1 = e^{-j\theta_1}$$

c)  $r_1 \neq 1$  ;  $\theta_1 = 0$  sau  $\theta_1 = \pi$  :

$$z_1 = r_1 \quad ; \quad z_2 = 1/z_1 = 1/r_1 \quad \text{sau} \quad z_1 = -r_1 \quad ; \quad z_2 = 1/z_1 = -1/r_1$$

d)  $r_1 = 1$  ;  $\theta_1 = 0$  sau  $\theta_1 = \pi$  :

$$z_1 = 1 \quad \text{sau} \quad z_1 = -1$$

Zerourile oarecare apar deci obligatoriu în grupuri de 4 zerouri: două în interiorul cercului unitate și două în exteriorul acestuia, în relație de simetrie geometrică; zerourile de pe cercul unitate apar în perechi complex conjugate; zerourile reale apar în perechi simetrice geometric față de cerc, cu excepția zerourilor  $z=1$  și  $z=-1$  care sunt simultan propriile lor inverse. Utilizând relațiile:

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = H(z) \Big|_{z=1} \quad ; \quad H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = H(z) \Big|_{z=-1}$$

și ținând cont de valorile funcțiilor de transfer de fază zero în punctele  $\omega=0$  și  $\omega=\pi$ , se poate afirma că: la **tipul 2** este obligatorie prezența zeroului  $z=-1$ ; la **tipul 3** este obligatorie prezența simultană a zerourilor  $z=1$  și  $z=-1$ ; la **tipul 4** este obligatorie prezența zeroului  $z=1$ .

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

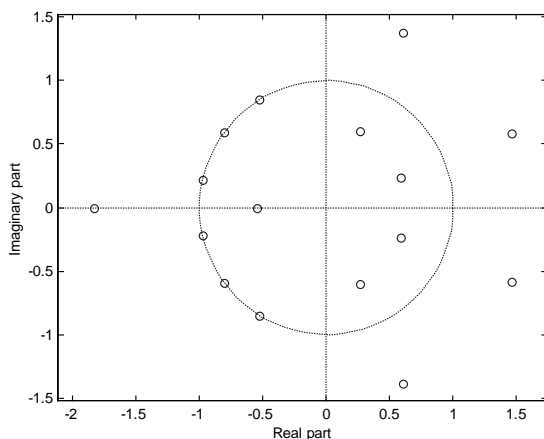
#### Exemple:

1. Să se reprezinte poziționarea zerourilor în planul  $\mathbf{Z}$  și să se precizeze tipul filtrului  $RFI$  definit prin funcția pondere:

$$h[n] = \frac{3}{5} \operatorname{sinc}\left(\frac{3\pi}{5}(n-8)\right), \quad n = 0, 1, \dots, 16.$$

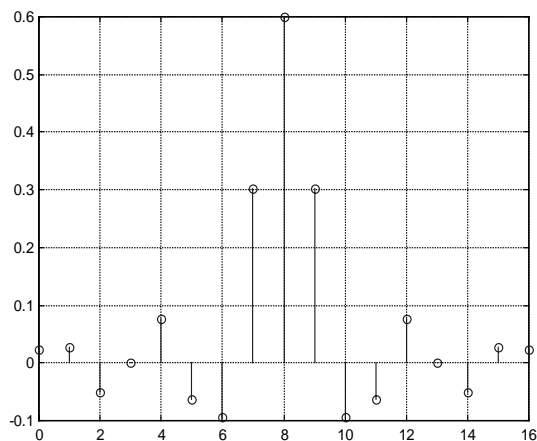
Reprezentați grafic răspunsul la impuls al filtrului.

```
n=0:16;  
h=3/5*sinc(3/5*(n-8));  
// vezi help sinc  
zplane(h)
```



// reprezentarea zerourilor în planul  $\mathbf{Z}$  corespunde unui filtru de tipul 1; observați simetria geometrică a zerourilor față de cercul de rază unitate; remarcăți faptul că zerourile de pe cercul unitate apar în perechi complex conjugate.

```
stem(n,h),grid
```



// din reprezentarea grafică a răspunsului la impuls se observă de asemenea că filtrul  $RFI$  din exemplu este de tipul 1.

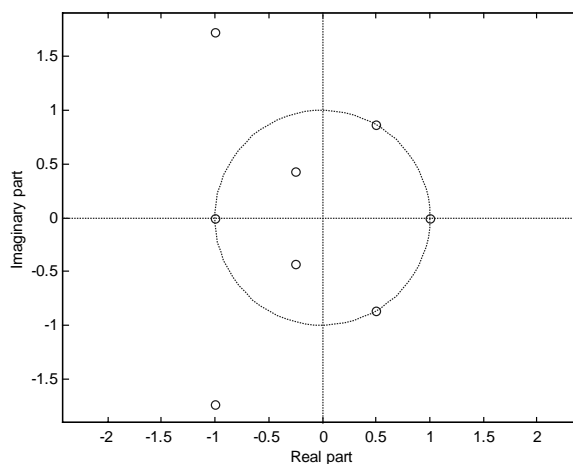
### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

2. Să se determine și să se reprezinte grafic funcția pondere  $h[n]$  a filtrului digital *RFI* cu fază liniară, de tipul 3, cu coeficienți reali și cu ordinul minim posibil, știind că funcția de transfer  $H(z)$  are zerourile  $z_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $z_2 = e^{j\frac{\pi}{3}}$  și  $H(e^{j\pi/2}) = -26j$ . Să se reprezinte poziționarea zerourilor în planul  $\mathbf{Z}$ .

```
z1=1/2*exp(j*2*pi/3);
z2=exp(j*pi/3);
z=[z1;conj(z1);1/z1;conj(1/z1);z2;conj(z2);1;-1];
// vectorul coloană z conține valorile zerourilor funcției de transfer a filtrului
ținând cont că:
```

- dacă  $z_1$  este zero complex și nu se află pe cercul de rază unitate atunci vor fi zerouri și  $z_1^*$ ,  $\frac{1}{z_1}$  și  $\frac{1}{z_1^*}$ ;
- dacă  $z_2$  este zero complex și se află pe cercul de rază unitate atunci și  $z_2^*$  va fi zero;
- filtrul este de tipul 3 și este deci obligatorie prezența simultană a zerourilor  $z = 1$  și  $z = -1$ ;
- filtrul este de ordin minim și deci nu mai apar alte zerouri în afara celor de mai sus.

```
zplane(z)
```



```
p=poly(z);
```

```
// vectorul p va conține valorile polinomului ale cărui rădăcini sunt zerourile din
vectorul z; vezi help poly.
```

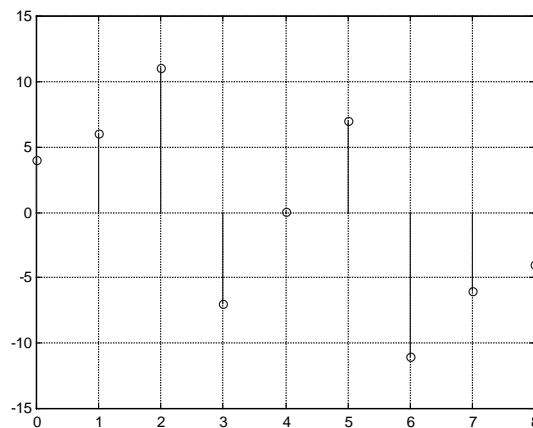
```
v=polyval(p,exp(i*pi/2)) → v =
```

```
0.0000 - 6.5000i
```

```
// vectorul p conține de fapt coeficienții funcției de transfer a filtrului; s-a
evaluat această funcție în  $e^{j\pi/2}$ ; pentru a satisface cerința din problemă trebuie
să efectuăm o înmulțire cu 4; vezi help polyval.
```

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

```
h=4*p;  
n=0:length(h)-1;  
stem(n,h),grid
```



// s-a reprezentat funcția pondere a filtrului; se observă că ea corespunde unui filtru de tipul 3.

#### **E2. Exerciții:**

1. Să se reprezinte poziționarea zerourilor în planul  $\mathbf{Z}$  și să se precizeze tipul filtrelor *RFI* definite prin:

a) 
$$h[n] = \begin{cases} 4 - |n - 3| & , \quad 0 \leq n \leq 6 \\ 0 & , \quad \text{rest} \end{cases}$$

b) 
$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} & , \quad 0 \leq n \leq 8 \\ 0 & , \quad \text{rest} \end{cases}$$

c) 
$$h[n] = \begin{cases} n & , \quad n = \overline{0,6} \\ 0 & , \quad n = 7 \\ n - 14 & , \quad n = \overline{8,14} \end{cases}$$

d) 
$$y[n] = x[n] - 2x[n - 3] + 5x[n - 5] + 5x[n - 6] - 2x[n - 8] + x[n - 11]$$

e) 
$$H(z) = 0,5 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-4} + 2z^{-5} - 2z^{-6} - z^{-7} + z^{-9} - z^{-10} - 0,5z^{-11}$$

f) 
$$H(z) = 1 - z^{-5}$$

g) 
$$H(z) = 1 - z^{-6}$$

Reprezentați grafic răspunsul la impuls al fiecărui filtru.

2. Să se determine și să se reprezinte grafic funcția pondere  $h[n]$  a filtrului digital *RFI* cu fază liniară, de tipul 2, cu coeficienți reali și cu ordinul minim posibil, știind că funcția de transfer  $H(z)$  are zerourile  $z_1 = 0,33e^{-j\pi/4}$ ,  $z_2 = -0,7$ ,  $z_3 = e^{j\pi/4}$  și  $z_4 = 0,5j$ . Să se reprezinte poziționarea zerourilor în planul  $\mathbf{Z}$ .

3. Reluați problema 2 în cazul în care filtrul este de tipul 4.

#### 3.3. Proiectarea filtrelor *RFI* cu fază liniară

Principalele metode utilizate în proiectarea acestei categorii importante de filtre *RFI* sunt: *metoda ferestrelor*, *metoda eșantionării în frecvență* și *metode bazate pe minimizarea erorii în domeniul frecvență*, utilizând un anumit criteriu de eroare.

##### 3.3.1. Metoda ferestrelor

Se distinge printr-o serie de avantaje constând în simplitate, obținerea de formule compacte pentru calculul coeficienților și lipsa procedurilor de optimizare a soluției (care necesită în general un timp de calcul important). Metoda presupune parcurgerea a două etape:

a) În prima etapă se determină răspunsul la impuls  $h_{\infty}[n]$ , cu suport infinit ( $-\infty < n < \infty$ ), pornind de la funcția de transfer impusă, notată aici  $H_{\infty}(e^{j\omega})$ . În acest scop suportul matematic îl oferă transformata Fourier inversă:

$$h_{\infty}[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\infty}(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\infty}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (3.25)$$

transformata directă fiind:

$$H_{\infty}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h_{\infty}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\infty}[n] e^{-j\omega n} \quad (3.26)$$

Deoarece se dorește ca filtrul rezultat să aibă faza liniară, este necesar ca în  $H_{\infty}(e^{j\omega})$  să fie inclus și factorul de fază liniară, adică:

$$H_{\infty}(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)} = \begin{cases} H_d(e^{j\omega}) e^{-j\omega(N-1)/2} & ; \text{pentru tipurile 1,2} \\ H_d(e^{j\omega}) e^{j(\pi/2 - \omega(N-1)/2)} & ; \text{pentru tipurile 3,4} \end{cases} \quad (3.27)$$

unde  $H_d(e^{j\omega})$  reprezintă funcția de transfer dorită de fază zero a filtrului ideal: FTJ, FTS, FTB, FOB, diferențiator digital, transformator digital Hilbert.

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Astfel, de exemplu:

- pentru FTJ digital ideal:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; \text{ pentru } |\omega| < \omega_t \\ 0 & ; \text{ pentru } \omega_t < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (3.28)$$

- pentru transformatorul Hilbert digital ideal:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & ; \text{ pentru } \omega \in (-\pi, 0) \\ -1 & ; \text{ pentru } \omega \in (0, \pi) \end{cases} \quad (3.29)$$

- pentru diferențiatorul digital de bandă largă ideal:

$$H_d(e^{j\omega}) = \omega \quad ; \text{ pentru } \omega \in (-\pi, \pi) \quad (3.30)$$

b) În a doua etapă se realizează trunchierea răspunsului la impuls  $h_\infty[n]$  astfel încât să se obțină secvența de lungime finită  $N$ , adică:

$$h[n] = \begin{cases} w[n]h_\infty[n] & \text{ pentru } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ în rest} \end{cases} \quad (3.31)$$

Trunchierea abruptă a răspunsului la impuls poate fi privită și ca o *ponderare* (înmulțire) a secvenței de lungime infinită cu o *funcție pondere* de lungime  $N$ , denumită *fereastră* și notată prin  $w[n]$ .

#### **Atenție:**

Referitor la această metodă de proiectare trebuie reținute următoarele aspecte:

- Trunchierea trebuie făcută astfel încât  $h[n]$  să conțină cel puțin câte 2 lobi laterali la stânga și la dreapta lobului central pentru a obține un bun răspuns în frecvență;
- Funcția pondere trunchiată  $h[n]$ , definită pe suportul  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , nu trebuie să aibă  $h[0] = h[N-1] = 0$ , situație în care lungimea filtrului ar fi declarată fals.
- Metoda de proiectare se mai numește și *metoda dezvoltării în serie Fourier* deoarece relația (3.26) reprezintă practic o dezvoltare în serie Fourier a funcției periodice de perioadă  $2\pi$ ,  $H_\infty(e^{j\omega})$ , coeficienții seriei fiind calculați cu relația (3.25).

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

- d) Asocierea factorului de fază liniară din expresia (3.27) prezintă două avantaje: pe de o parte se operează cu funcția  $H_\infty(e^{j\omega})$ , de perioadă  $2\pi$  pentru toate tipurile de filtre, iar pe de altă parte, trunchierea asigură localizarea răspunsului de lungime finită  $N$ , direct pe suportul dorit  $0 \leq n \leq N - 1$ .
- e) Trunchierea directă a seriei Fourier conform relației (3.31), conduce la fenomenul Gibbs (efectul Gibbs) care se manifestă prin apariția unor ondulații (denumite *ripluri*) ale răspunsului în frecvență al filtrului proiectat, care cresc către marginile benzilor de trecere și oprire, în apropierea punctelor de discontinuitate ale caracteristicii ideale. În plus va apărea și o zonă de tranziție în jurul frecvențelor de tăiere teoretice.

Studiul efectului Gibbs permite evidențierea cerințelor fundamentale pe care trebuie să le îndeplinească o fereastră în scopul obținerii unui filtru *RFI* cu performanțe cât mai bune și anume:

1. Lobul principal al ferestrei să fie cât mai îngust;
2. Lobul principal să conțină cea mai mare parte din energia ferestrei;
3. Energia lobilor secundari să fie cât mai uniform repartizată între aceștia.

Restricțiile de mai sus determină în aceeași ordine următoarele performanțe pentru filtrul proiectat:

1. Zonă de tranziție îngustă;
2. Ripluri mici ale răspunsului în frecvență;
3. Uniformizarea riplurilor, în scopul evitării situației în care energia lobilor secundari ai răspunsului în frecvență al filtrului proiectat este concentrată în principal în primii lobi secundari.

În general cele trei cerințe nu pot fi satisfăcute de nici o fereastră de ponderare deoarece cerințele 1 și 2 sunt contradictorii.

Cea mai simplă fereastră este *fereastra dreptunghiulară*, definită astfel:

$$w_d[n] = \begin{cases} 1 & \text{pentru } 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (3.32)$$

Ea îndeplinește cel mai bine prima cerință și satisfăcător cerințele 2, 3.

Se poate acționa pentru reducerea riplurilor în cele două benzi prin utilizarea altor tipuri de ferestre, care realizează trunchieri mai puțin abrupte ale răspunsului la impuls  $h_\infty[n]$ , comparativ cu fereastra dreptunghiulară și anume: *fereastra triunghiulară*, *fereastra Hanning*, *fereastra Hamming*, *fereastra Blackman*, *fereastra Kaiser*, etc.

#### 3.3.2. Funcțiile fereastră

##### *Fereastra triunghiulară (Bartlett)*

$$w[n] = 1 - \frac{2}{N+1} \left| n - \frac{N-1}{2} \right|, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.33)$$

##### *Fereastra Blackman*

$$w[n] = 0,42 - 0,5 \cdot \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right] + 0,08 \cdot \cos \left[ \frac{4\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.34)$$

##### *Fereastra dreptunghiulară (rectangulară)*

$$w[n] = 1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.35)$$

##### *Sintaxa:*

**w = boxcar(N)**

- returnează un *vector coloană* w de lungime N ce va conține valorile ferestrei dreptunghiulare.

##### *Fereastra Hamming*

$$w[n] = 0,54 - 0,46 \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.36)$$

##### *Fereastra Hanning (von Hann)*

$$w[n] = 0,5 - 0,5 \cos \left[ \frac{2\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right], \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.37)$$

##### *Fereastra Kaiser*

$$w[n] = \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{1 - \left( \frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right]}{I_0(\beta)}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.38)$$

unde  $I_0[\cdot]$  este funcția Bessel modificată de ordinul zero.



### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Parametrul  $\beta$  depinde de atenuarea minimă  $a_m$ [dB] din zona de oprire a filtrului proiectat după formula:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(a_m - 8,7) & , \quad a_m > 50\text{dB} \\ 0,5842(a_m - 21)^{0,4} + 0,07886(a_m - 21) & , \quad 21\text{dB} \leq a_m \leq 50\text{dB} \\ 0 & , \quad a_m < 21\text{dB} \end{cases} \quad (3.39)$$

Performanțele filtrelor proiectate cu ferestrele dreptunghiulară, Hamming, Blackman pot fi obținute folosind ferestre Kaiser cu  $\beta = 0$ ,  $\beta = 5,4414$  respectiv  $\beta = 8,885$ .

#### *Sintaxa:*

**w = kaiser(N,beta)**

- returnează un *vector coloană* w de lungime N ce conține valorile funcției fereastră Kaiser (vezi relația (3.38)); beta reprezintă valoarea parametrului  $\beta$  (vezi relația (3.39)).

#### *Atenție:*

În MATLAB există și funcțiile fereastră `bartlett`, `blackman`, `hamming`, `hanning`, `triang` ce pot fi apelate cu sintaxa generală:

**w = nume\_fereastră(N)**

- returnează un *vector coloană* w de lungime N ce va conține valorile ferestrei specificate prin `nume_fereastră`.

Relațiile de definiție pentru funcțiile fereastră în MATLAB *diferă* însă de cele prezentate în teorie deoarece:

- lungimea ferestrei  $N$  ce apare la numitorul relațiilor prezentate mai sus se modifică în  $N - 1$ ; această schimbare implică modificarea trecerilor prin zero ale caracteristicilor amplitudine-frecvență rezultând o nouă poziționare a lobilor (în funcție de  $N$ ) cu implicații asupra riplurilor caracteristicii amplitudine-frecvență pentru filtrul proiectat; fenomenul este vizibil și defavorabil mai ales pentru lungimi ale ferestrei mici ( $N < 15$ ).
- s-a ținut cont de faptul că primul element dintr-un vector are întotdeauna indicele 1 (și nu 0) și s-a realizat o indexare cu 1 a variabilei  $n$ .

Se pot crea însă noi funcții MATLAB care să realizeze ferestrele de ponderare pornind de la formulele teoretice prezentate anterior. Vom exemplifica în continuare acest lucru pentru fereastra Hamming (vezi secțiunea 1.2.8. și relația (3.36)):

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

```
function w=hamm(N)
n=0:N-1;
w=0.54-0.46*cos(2*pi/N*(n'+1/2));
```

#### **E3. Exerciții:**

Pornind de la exemplul prezentat să se realizeze funcții MATLAB pentru următoarele ferestre de ponderare:

`hann` – fereastra Hanning (von Hann);

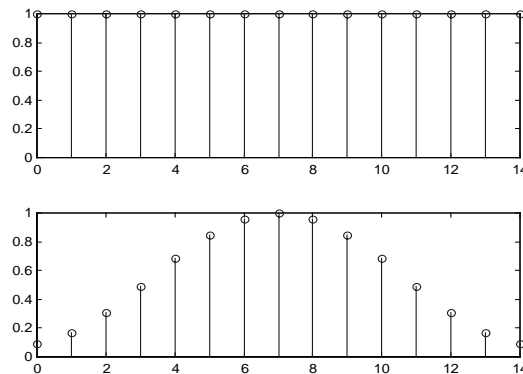
`bart` – fereastra triunghiulară (Bartlett);

`black` – fereastra Blackman

#### **Exemplu:**

Realizați o comparație între fereastra dreptunghiulară și fereastra Hamming din punct de vedere al cerințelor teoretice discutate (vezi pagina 66). Se va alege lungimea ferestrelor  $N = 15$ .

```
n=0:14;
wd=boxcar(15);
wh=hamm(15);
subplot(2,1,1),stem(n,wd)
subplot(2,1,2),stem(n,wh)
```



// s-au definit și reprezentat grafic în domeniul timp cele două funcții fereastră.

Pentru a realiza comparația între ele vom folosi o variantă normată a acestora impunând ca în  $\omega = 0$  să avem  $W(e^{j\omega}) = \sum_n w[n] = 1$  (0 dB). Va trebui deci să

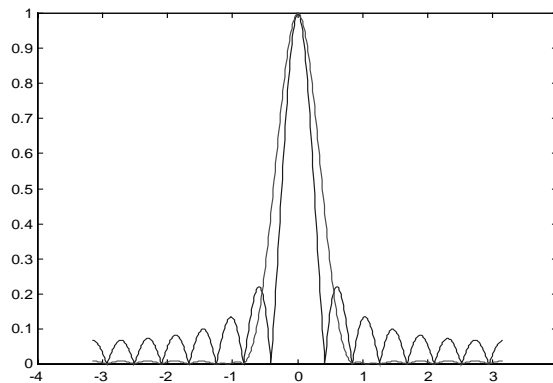
împărțim valorile fiecărui eșantion al ferestrei la suma tuturor eșantioanelor.

```
wdn=wd/sum(wd);
whn=wh/sum(wh);
Wd=fft(wdn,512);
Wh=fft(whn,512);
```

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

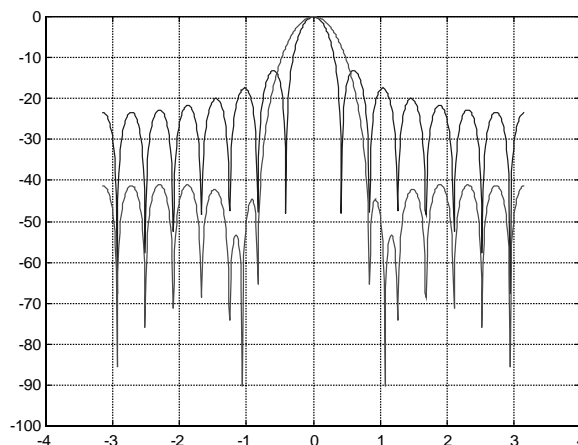
---

```
w=-pi:2*pi/512:pi-2*pi/512;  
plot(f,fftshift(abs(Wd)), 'b', f,fftshift(abs(Wh)), 'r')
```



// s-au reprezentat caracteristicile amplitudine-frecvență ale celor două ferestre.  
Pentru reprezentarea în dB a acestora vom folosi următoarea comandă:

```
plot(f,20*log10(fftshift(abs(Wd))), 'b', ...  
f, 20*log10(fftshift(abs(Wh))), 'r'),grid
```



// se observă că:

- lobul principal al ferestrei dreptunghiulare este mai îngust decât lobul principal al ferestrei Hamming și deci filtrele proiectate folosind fereastra dreptunghiulară vor avea o zonă de tranziție mai îngustă decât cele proiectate folosind fereastra Hamming;
- cerința ca lobul principal să conțină cea mai mare parte din energia ferestrei este îndeplinită mai bine de fereastra Hamming și prin urmare filtrele proiectate cu această fereastră vor avea ripluri mai mici ale răspunsului în frecvență comparativ cu filtrele proiectate folosind fereastra dreptunghiulară;
- energia lobilor secundari este mai uniform repartizată între aceștia în cazul ferestrei Hamming ceea ce implică o mai bună uniformizare a riplurilor răspunsului în frecvență al filtrului proiectat cu această fereastră, comparativ cu filtrul proiectat cu fereastra dreptunghiulară.

*Reluați exemplul folosind funcția hamming din MATLAB. Ce observați?*

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

#### **E4. Exerciții:**

Folosind modelul din exemplu realizați comparații între fereastra dreptunghiulară și celelalte tipuri de ferestre. Variați lungimea ferestrei  $N$ . Ce se observă odată cu creșterea acesteia?

#### **3.3.3. Funcții MATLAB pentru proiectarea filtrelor RFI prin metoda ferestrelor**

Fie  $h[n]$  răspunsul la impuls al filtrului digital RFI. Notând cu  $N$  lungimea acestei secvențe cauzale, definită pe suportul  $0 \leq n \leq N - 1$ , transformata  $Z$  a lui  $h[n]$  reprezintă funcția de transfer a filtrului:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots + h[N-1]z^{-(N-1)} \quad (3.40)$$

Ținând cont de faptul că în MATLAB primul element dintr-un vector are indicele 1, funcția de transfer a unui filtru digital cu răspuns finit la impuls poate fi exprimată sub forma:

$$H(z) = h[1] + h[2]z^{-1} + h[3]z^{-2} + \dots + h[n+1]z^{-n} \quad (3.41)$$

în care  $h[1], h[2], h[3], \dots, h[n+1]$  reprezintă coeficienții funcției de transfer a filtrului (eșantioanele răspunsului la impuls al filtrului) iar  $n$  va fi ordinul filtrului.

Funcțiile MATLAB `fir1` și `fir2` permit proiectarea prin metoda ferestrelor a filtrelor digitale RFI. Se poate folosi oricare din ferestrele prezentate în secțiunea precedentă.

#### **Atenție:**

- Comparând relațiile (3.40) și (3.41) putem trage concluzia că ordinul filtrului  $n$  din relația (3.41) este egal cu  $N - 1$  (lungimea secvenței minus unu) din relația (3.40). Acest aspect trebuie avut în vedere la trecerea de la teorie la programare pentru evitarea apariției unor rezultate eronate.
- Funcția MATLAB `fir1` calculează coeficienții filtrului astfel încât suma lor să fie egală cu 1, impunând ca în  $\omega = 0$  să avem  $H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] = 1$  (0 dB).
- Normarea frecvențelor se face în mod diferit (în comparație cu relația (3.8)):

$$f_{MATLAB} = \frac{F}{F_e / 2} = 2f_{teoretic} \quad (3.42)$$

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

**fir1** – *Proiectarea prin metoda ferestrelor a filtrelor digitale RFI de tipul trece jos (FTJ), trece sus (FTS), trece bandă (FTB) și oprește bandă (FOB).*

*Sintaxe:*

**h = fir1(n,Wn)**

- proiectează prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră Hamming de lungime  $n + 1$ , un *filtru trece jos* de ordinul  $n$  cu frecvența de tăiere normală  $W_n$ ;  $W_n$  are valori cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare ; dacă avem frecvențele de tăiere și de eșantionare exprimate în Hz atunci

$$W_n = \text{frecvența de tăiere}/(\text{frecvența de eșantionare}/2);$$

- dacă  $W_n$  este un vector cu două elemente,  $W_n = [w_1, w_2]$  cu  $w_1 < w_2$ , se va proiecta prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră Hamming de lungime  $n+1$ , un *filtru trece bandă* de ordinul  $n$ , cu banda de trecere cuprinsă între frecvențele  $w_1$  și  $w_2$  (normate după regula precedentă).
- se va returna vectorul linie  $h$  de lungime  $n+1$  ce conține coeficienții funcției de transfer  $H(z)$  a filtrului ( $h = [h[1], h[2], h[3], \dots, h[n+1]]$ ); vezi relația (3.41));

**h = fir1(n,Wn,'high')**

- proiectează prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră Hamming de lungime  $n+1$ , un *filtru trece sus* de ordinul  $n$  (*ordinul  $n$  trebuie să fie par*) cu frecvența de tăiere  $W_n$ ;

**h = fir1(n,Wn,'stop')**

- $W_n$  este un vector cu două elemente,  $W_n = [w_1, w_2]$  cu  $w_1 < w_2$ ; se va proiecta prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră Hamming de lungime  $n+1$ , un *filtru oprește bandă* de ordinul  $n$  (*ordinul  $n$  trebuie să fie par*), cu banda de oprire cuprinsă între  $w_1$  și  $w_2$ .

**h = fir1(n,Wn,tip\_fereastră(n+1))**

- *tip\_fereastră* specifică tipul ferestrei (vezi secțiunea 3.3.2.) cu care dorim să proiectăm filtrul; în loc de *tip\_fereastră(n+1)* poate fi orice vector coloană de lungime  $n+1$  ce conține valorile eșantioanelor unei secvențe pe care dorim să o folosim pe post de fereastră în proiectarea filtrului;
- se va proiecta prin metoda ferestrelor, utilizând fereastră specificată de lungime  $n + 1$ , un *filtru trece jos* de ordinul  $n$  cu frecvența de tăiere  $W_n$ ;
- dacă  $W_n$  este un vector cu două elemente,  $W_n = [w_1, w_2]$  cu  $w_1 < w_2$ , se va proiecta prin metoda ferestrelor, utilizând fereastră specificată de lungime

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

$n+1$ , un *filtru trece bandă* de ordinul  $n$ , cu banda de trecere cuprinsă între frecvențele  $w_1$  și  $w_2$ .

**`h = fir1(n,Wn,'high',tip_fereastră(n+1))`**

- proiectează prin metoda ferestrelor, utilizând fereastra specificată de lungime  $n+1$ , un *filtru trece sus* de ordinul  $n$  (*ordinul  $n$  trebuie să fie par*) cu frecvența de tăiere  $Wn$ ;

**`h = fir1(n,Wn,'stop',tip_fereastră(n+1))`**

- $Wn$  este un vector cu două elemente,  $Wn = [w_1, w_2]$  cu  $w_1 < w_2$ ; se va proiecta prin metoda ferestrelor, utilizând fereastra specificată de lungime  $n+1$ , un *filtru oprește bandă* de ordinul  $n$  (*ordinul  $n$  trebuie să fie par*), cu banda de oprire cuprinsă între  $w_1$  și  $w_2$ .

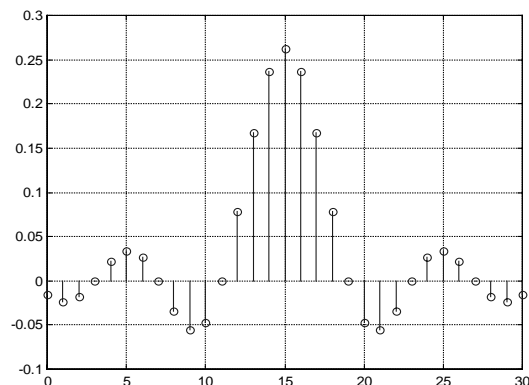
#### **Exemplu:**

Să se proiecteze prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră dreptunghiulară, un filtru trece jos cu lungimea  $N = 31$  și frecvența de tăiere  $F_t = 5\text{kHz}$ . Frecvența de eșantionare este  $F_e = 40\text{kHz}$ . Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului, poziționarea zerourilor în planul  $Z$  și caracteristica amplitudine-frecvență pentru funcției de transfer (reprezentare liniară și în dB).

Dacă filtrul are lungimea  $N = 31$  atunci ordinul filtrului ( $n$  din sintaxa MATLAB) va fi  $n = N - 1 = 30$ , lungimea ferestrei va fi  $n + 1 = N = 31$ , iar frecvența de tăiere normalată ( $Wn$  din sintaxa MATLAB) se calculează astfel:

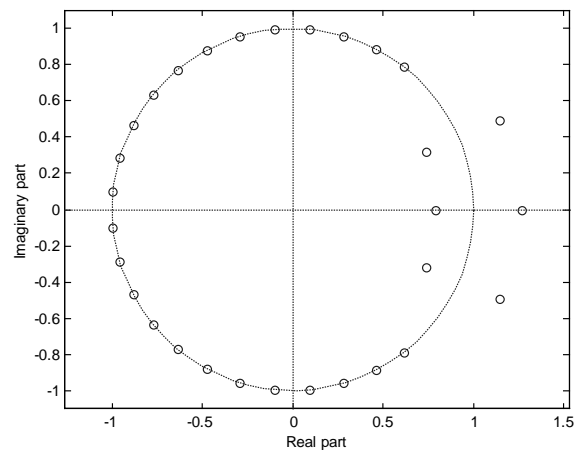
$$f_{MATLAB} = \frac{F_t}{F_e/2} = \frac{5}{40/2} = 0,25$$

```
h=fir1(30,0.25,boxcar(31));  
n=0:30;  
stem(n,h),grid
```



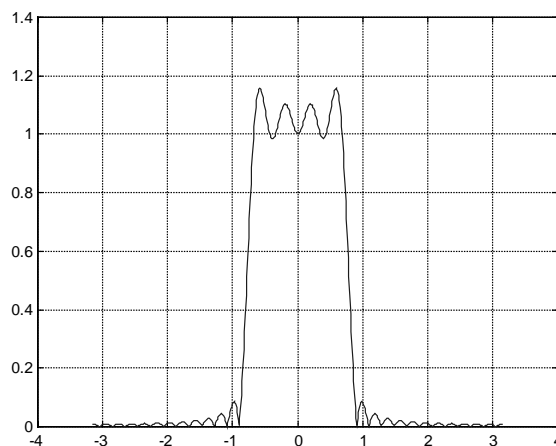
### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

zplane(h)

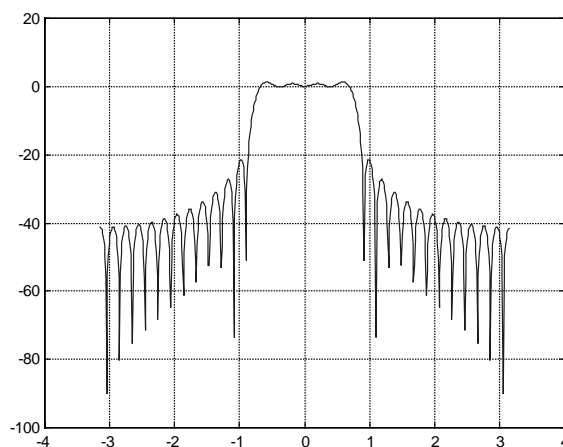


// din cele două reprezentări se observă că filtrul proiectat este de tipul 1.

```
H=fft(h,512);  
w=-pi:2*pi/512:pi-2*pi/512;  
plot(w,fftshift(abs(H))),grid
```



```
plot(w,20*log10(fftshift(abs(H))),grid
```



// se remarcă prezența riplurilor și mărimea lor în apropierea zonei de tranziție .

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Reluați exemplul precedent folosind o lungime  $N = 51$ . Ce observați referitor la dimensiunea riplurilor și a zonei de tranziție?

Folosiți apoi în proiectare fereastra Hamming. Comparați cu rezultatele obținute la proiectarea cu fereastra dreptunghiulară.

#### **E5. Exerciții:**

1. Să se proiecteze prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră dreptunghiulară, un filtru trece sus cu lungimea  $N = 31$  și frecvența de tăiere  $F_t = 5\text{kHz}$ . Frecvența de eșantionare este  $F_e = 40\text{kHz}$ . Precizați tipul filtrului. Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului, poziționarea zerourilor în planul  $Z$  și caracteristica amplitudine-frecvență pentru funcției de transfer (reprezentare liniară și în dB).
2. Reluați problema 1 folosind  $N = 51$ . Discutați rezultatele obținute.
3. Reluați problema 1 folosind în proiectare și celelalte tipuri de ferestre. Comentați rezultatele obținute prezentând avantajele și dezavantajele folosirii fiecărui tip de fereastră.
4. Să se proiecteze prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră dreptunghiulară, un filtru trece bandă cu lungimea  $N = 46$  și frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 5\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 15\text{kHz}$ . Frecvența de eșantionare este  $F_e = 40\text{kHz}$ . Precizați tipul filtrului. Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului, poziționarea zerourilor în planul  $Z$  și caracteristica amplitudine-frecvență pentru funcției de transfer (reprezentare liniară și în dB).
5. Reluați problema 4 pentru frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 8\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 10\text{kHz}$ . Comentați rezultatele obținute.
6. Reluați problema 4 pentru frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 8\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 10\text{kHz}$  și lungimea  $N = 86$ . Comentați rezultatele obținute.
7. Reluați problema 6 folosind în proiectare și celelalte tipuri de ferestre. Comentați rezultatele obținute.
8. Să se proiecteze prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră dreptunghiulară, un filtru oprește bandă cu lungimea  $N = 45$  și frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 5\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 15\text{kHz}$ . Frecvența de eșantionare este  $F_e = 40\text{kHz}$ . Precizați tipul filtrului. Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului, poziționarea zerourilor în planul  $Z$  și caracteristica amplitudine-frecvență pentru funcției de transfer (reprezentare liniară și în dB).
9. Reluați problema 8 pentru frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 8\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 10\text{kHz}$ . Comentați rezultatele obținute.
10. Reluați problema 8 pentru frecvențele de tăiere  $F_{t1} = 8\text{kHz}$  și  $F_{t2} = 10\text{kHz}$  și lungimea  $N = 85$ . Comentați rezultatele obținute.
11. Reluați problema 9 folosind în proiectare și celelalte tipuri de ferestre. Comentați rezultatele obținute.



**fir2** – *Proiectarea prin metoda ferestrelor a filtrelor digitale RFI cu răspuns în frecvență arbitrar ales.*

**Sintaxe :**

**h = fir2(n,f,m)**

- n reprezintă *ordinul filtrului* pe care dorim să-l proiectăm (lungimea minus unu);
- vectorul *f* conține valori de pe axa frecvențelor normate; aceste valori sunt cuprinse între 0 și 1 (primul element al vectorului *f* trebuie să fie 0 iar ultimul element trebuie să fie 1), unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare; dacă avem frecvențele exprimate în Hz atunci pentru a calcula elementele vectorului *f* vom face conversia:  
$$\text{frecvența[Hz]} / (\text{frecvența de eșantionare[Hz]} / 2);$$
- vectorul *m* conține valorile modulului răspunsului în frecvență dorit; aceste valori corespund frecvențelor din vectorul *f*; comanda `plot(f,m)` va afișa caracteristica de modul a răspunsului în frecvență al filtrului dorit;
- se va returna *vectorul linie* *h* de lungime  $n + 1$  ce conține coeficienții funcției de transfer  $H(z)$  a filtrului ( $h = [h[1], h[2], h[3], \dots, h[n+1]]$ ; vezi relația (3.41));
- proiectarea se face prin metoda ferestrelor folosind o fereastră Hamming de lungime  $n + 1$ .

**h = fir2(n,f,m,tip\_fereastra(n+1))**

- n, f, m și h au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- *tip\_fereastra* specifică tipul ferestrei (vezi secțiunea 3.3.2.) cu care dorim să proiectăm filtrul; în loc de `tip_fereastra(n+1)` poate fi orice vector coloană de lungime  $n+1$  ce conține valorile eșantioanelor unei secvențe pe care dorim să o folosim pe post de fereastră în proiectarea filtrului.

**Exemplu:**

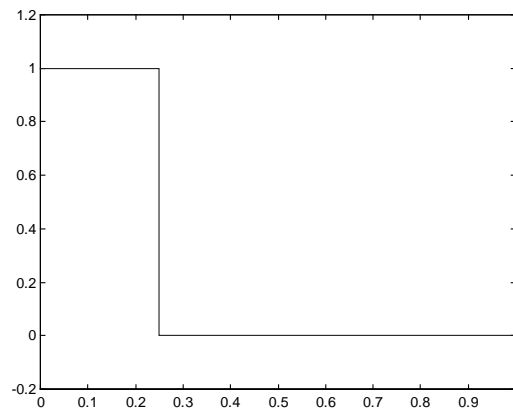
Să se proiecteze prin metoda ferestrelor, utilizând o fereastră dreptunghiulară, un filtru trece jos cu lungimea  $N = 31$  și frecvența de tăiere  $F_t = 5\text{kHz}$ . Frecvența de eșantionare este  $F_e = 40\text{kHz}$ . Să se reprezinte grafic funcția pondere a filtrului, poziționarea zerourilor în planul **Z** și caracteristica amplitudine-frecvență pentru funcției de transfer (reprezentare liniară și în dB).

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

Dacă filtrul are lungimea  $N = 31$  atunci ordinul filtrului ( $n$  din sintaxa MATLAB) va fi  $n = N - 1 = 30$ , lungimea ferestrei va fi  $n + 1 = N = 31$ , iar frecvența de tăiere normală ( $W_n$  din sintaxa MATLAB) se calculează astfel:

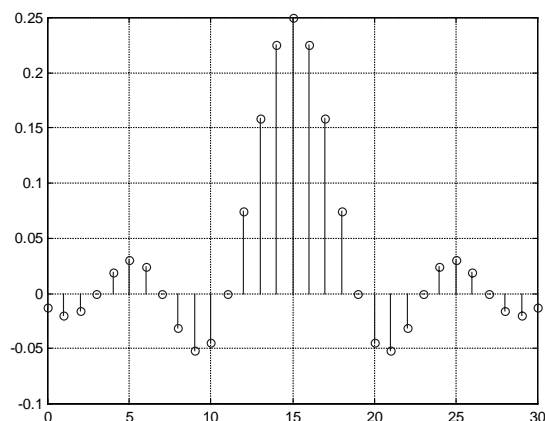
$$f_{MATLAB} = \frac{F_t}{F_e / 2} = \frac{5}{40 / 2} = 0,25$$

```
f=[0,0.25,0.25,1];  
m=[1,1,0,0];  
plot(f,m),axis([0 1 -0.2 1.2])
```



// s-a afișat caracteristica de modul a răspunsului în frecvență al filtrului dorit (filtru trece jos ideal); se observă corespondența dintre valorile vectorilor  $f$  și  $m$ : la frecvența 0 modulul este 1, la frecvența 0,25 modulul este 0 și apoi 1 (deoarece 0,25 este frecvența teoretică de tăiere; din această cauză în vectorul  $f$  apare de două ori valoarea 0,25) iar la frecvența 1 modulul este 1; comanda `axis` s-a folosit pentru o mai bună vizualizare a graficului.

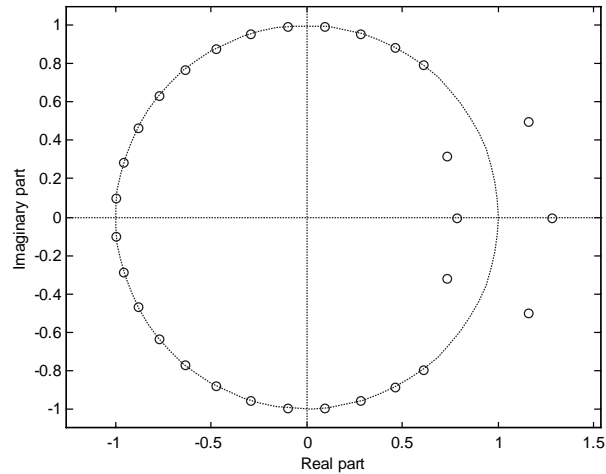
```
h=fir2(30,f,m,boxcar(31))  
n=0:30;  
stem(n,h),grid
```



// se observă diferența față de valorile răspunsului la impuls obținut prin proiectarea cu `fir1` (vezi pagina 73); aceasta se datorează faptului că funcția `fir2` nu mai impune condiția ca în  $\omega = 0$  să avem  $H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] = 1$  (0 dB).

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

zplane(h)

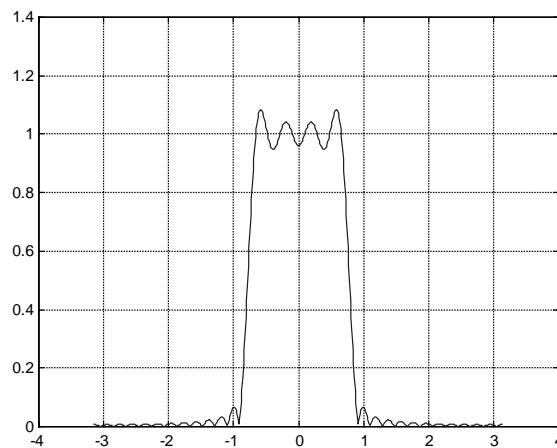


// din cele două reprezentări se observă că filtrul proiectat este de tipul 1;

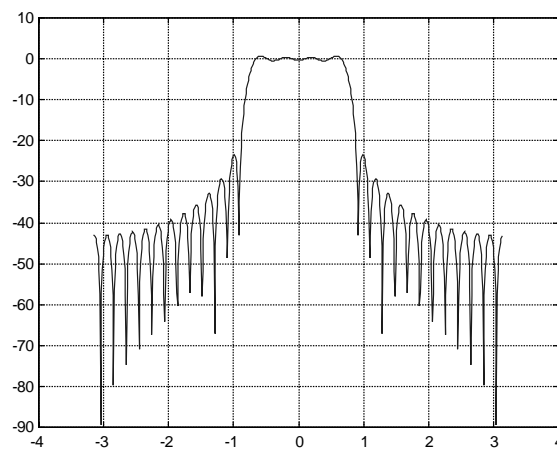
```
H=fft(h,512);
```

```
w=-pi:2*pi/512:pi-2*pi/512;
```

```
plot(w,fftshift(abs(H)),grid
```



```
plot(w,20*log10(fftshift(abs(H))),grid
```



// se remarcă prezența riplurilor și mărimea lor în apropierea zonei de tranziție.  
*Comparați* cu reprezentările obținute la `fir1` (vezi pagina 74). Ce remarcați?

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

Reluați exemplul precedent folosind o lungime  $N = 51$ . Ce observați referitor la dimensiunea riplurilor și a zonei de tranziție?

Folosiți apoi în proiectare fereastra *Hamming*. Comparați cu rezultatele obținute la proiectarea cu fereastra dreptunghiulară.

#### **E6. Exerciții:**

Reluați problemele 1, 4 și 8 din cadrul exercițiilor de la `fir1` (vezi pagina 75) folosind pentru proiectare funcția `fir2`. Comentați rezultatele obținute.

#### 3.3.4. Funcții MATLAB pentru proiectarea filtrelor *RFI* prin metode bazate pe aproximarea în domeniul frecvență

Suportul teoretic îl constituie teoria aproximării funcțiilor de transfer utilizând un anumit *criteriu de minimizare a erorii* dintre funcția de transfer aproximantă și cea aproximată (dorită), eroarea fiind evaluată în benzile de frecvență de interes practic (banda de trecere efectivă și banda de oprire efectivă în cazul unui filtru trece jos).

***firls*** – Proiectarea filtrelor digitale *RFI* prin aproximarea în sensul celor mai mici pătrate a unui răspuns în frecvență specificat.

**Sintaxe:**

**`h = firls(n,f,m)`**

- $n$  reprezintă *ordinul* filtrului pe care dorim să-l proiectăm (lungimea minus unu);
- vectorul  $f$  conține valori de pe axa frecvențelor normate; aceste valori sunt cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare; dacă avem frecvențele exprimate în Hz atunci pentru a calcula elementele vectorului  $f$  vom face conversia:  
$$\text{frecvența[Hz]} / (\text{frecvența de eșantionare[Hz]} / 2);$$
- vectorul  $m$  conține valorile modulului răspunsului în frecvență dorit; aceste valori corespund frecvențelor din vectorul  $f$ ; comanda `plot(f,m)` va afișa caracteristica de modul a răspunsului în frecvență al filtrului dorit;
- *lungimea vectorilor  $f$  și  $m$  trebuie să fie un număr par* ;
- se va returna *vectorul linie*  $h$  de lungime  $n + 1$  ce conține coeficienții funcției de transfer  $H(z)$  a filtrului ( $h = [h[1], h[2], h[3], \dots, h[n+1]]$ ); vezi relația (3.41));

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

**h = firls(n,f,m,'hilbert')**

- n, f, m și h au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- se va proiecta un *transformator Hilbert*.

**h = firls(n,f,m,'differentiator')**

- n, f, m și h au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- se va proiecta un *diferențiator digital*.

**h = firls(n,f,m,w)**

- n, f, m și h au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- vectorul w conține valorile ponderilor corespunzătoare aproximărilor din fiecare bandă; lungimea sa va fi egală cu jumătate din lungimea vectorilor f și m.

**h = firls(n,f,m,w,'hilbert')**

- n, f, m, w și h au aceleași semnificații ca în sintaxele anterioare;
- se va proiecta un *transformator Hilbert*.

**h = firls(n,f,m,w,'differentiator')**

- n, f, m, w și h au aceleași semnificații ca în sintaxele anterioare;
- se va proiecta un *diferențiator digital*.

**remez** – *Proiectarea filtrelor digitale RFI prin aproximare Cebîșev, utilizând algoritmul schimbărilor Remez (algoritmul Parks-McClellan).*

*Sintaxe:*

**h = remez(n,f,m)**

- n reprezintă *ordinul* filtrului pe care dorim să-l proiectăm (lungimea minus unu);
- vectorul f conține valori de pe axa frecvențelor normate; aceste valori sunt cuprinse între 0 și 1, unde 1 corespunde jumătății frecvenței de eșantionare; dacă avem frecvențele exprimate în Hz atunci pentru a calcula elementele vectorului f vom face conversia:  
$$\text{frecvența[Hz]} / (\text{frecvența de eșantionare[Hz]} / 2);$$
- vectorul m conține valorile modulului răspunsului în frecvență dorit; aceste valori corespund frecvențelor din vectorul f; comanda `plot(f,m)` va afișa caracteristica de modul a răspunsului în frecvență al filtrului dorit;
- *lungimea vectorilor f și m trebuie să fie un număr par* ;

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

- se va returna *vectorul linie*  $h$  de lungime  $n + 1$  ce conține coeficienții funcției de transfer  $H(z)$  a filtrului ( $h = [h[1], h[2], h[3], \dots, h[n+1]]$ ); vezi relația (3.41));

**`h = remez(n, f, m, 'hilbert')`**

- $n$ ,  $f$ ,  $m$  și  $h$  au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- se va proiecta un *transformator Hilbert*.

**`h = remez(n, f, m, 'differentiator')`**

- $n$ ,  $f$ ,  $m$  și  $h$  au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- se va proiecta un *diferențiator digital*.

**`h = remez(n, f, m, w)`**

- $n$ ,  $f$ ,  $m$  și  $h$  au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă;
- vectorul  $w$  conține valorile ponderilor corespunzătoare aproximărilor din fiecare bandă; lungimea sa va fi egală cu jumătate din lungimea vectorilor  $f$  și  $m$ .

**`h = remez(n, f, m, w, 'hilbert')`**

- $n$ ,  $f$ ,  $m$ ,  $w$  și  $h$  au aceleași semnificații ca în sintaxele anterioare;
- se va proiecta un *transformator Hilbert*.

**`h = remez(n, f, m, w, 'differentiator')`**

- $n$ ,  $f$ ,  $m$ ,  $w$  și  $h$  au aceleași semnificații ca în sintaxele anterioare;
- se va proiecta un *diferențiator digital*.

**`remezord` – Determinarea parametrilor de intrare ai funcției `remez`.**

**Sintaxe:**

**`[n, fo, mo, w] = remezord(f, m, dev)`**

- vectorul  $f$  conține valorile frecvențelor de la capetele benzilor de interes (de exemplu în cazul unui filtru trece jos este vorba despre frecvența limită superioară a benzii de trecere și frecvența limită inferioară a benzii de oprire);
- vectorul  $m$  specifică valorile amplitudinilor dorite pentru modulul răspunsului în frecvență al filtrului, în benzile specificate de vectorul  $f$  (de exemplu în cazul unui filtru trece jos vectorul  $m$  va conține valorile 1, corespunzătoare benzii de trecere și 0, corespunzătoare benzii de oprire);
- *lungimea vectorului*  $f = 2 \cdot (\text{lungimea vectorului } m) - 2$ ;

### 3. FILTRE CU RĂSPUNS FINIT LA IMPULS

---

- vectorul `dev` conține valorile maxim admise ale erorilor de aproximare dintre amplitudinea dorită (specificată în vectorul `m`) și amplitudinea caracteristicii de modul a răspunsului în frecvență al filtrului rezultat;
- *lungimea vectorului `dev` = lungimea vectorului `m` ;*
- rezultatele `n`, `fo`, `mo` și `w` vor fi chiar parametrii de intrare ai funcției `remez`:  
`h=remez(n, fo, mo, w)`

`[n, fo, mo, w] = remezord(f, m, dev, Fs)`

- `Fs` specifică valoarea frecvenței de eșantionare; dacă nu este specificată frecvența de eșantionare (ca în sintaxa precedentă) se alege în mod implicit valoarea `Fs = 2 Hz` (acest lucru implică faptul că frecvența Nyquist este 1 Hz)
- ceilalți parametri au aceleași semnificații ca în sintaxa precedentă.

#### **Observație:**

În unele cazuri funcția `remezord` subestimează ordinul filtrului. În acest caz, dacă nu suntem mulțumiți de caracteristicile filtrului obținut, se poate încerca un ordin mai mare majorând ordinul estimat cu 1 sau 2, folosindu-se pentru proiectare `h=remez(n+1, fo, mo, w)` sau `h=remez(n+2, fo, mo, w)`.

#### **Exemplu:**

Să se proiecteze folosind algoritmul schimbărilor Remez, un filtru trece jos având riplul de 0.01 în banda de trecere și 0.1 în banda de oprire. Frecvența limită superioară a benzii de trecere este 6 kHz iar frecvența limită inferioară a benzii de oprire este 8 kHz. Frecvența de eșantionare este `Fs = 24 kHz`.

```
f=[6000,8000];
```

```
m=[1,0];
```

```
dev=[0.01,0.1];
```

```
[n,fo,mo,w]=remezord(f,m,dev,24000)    →  n =  
                                           16  
                                           fo =  
                                           0  
                                           0.5000  
                                           0.6667  
                                           1.0000  
                                           mo =  
                                           1  
                                           1  
                                           0  
                                           0  
                                           w =  
                                           10  
                                           1
```

```
h=remez(n+2, fo, mo, w);
```