6. EFECTE ALE FORMATELOR FINITE DE REPREZENTARE A NUMERELOR

6.1. Reguli de scalare pentru evitarea depăşirii capacităţii registrelor.

În cazul utilizării aritmeticii cu virgulă fixă, în complement faţă de doi, operaţia de scalare este necesară pentru a nu depăşi capacitatea registrelor. Aceasta implică două aspecte:

1. Scalarea funcţiei de transfer $H(z)$ prin înmulţirea cu o constantă subunitară s_0, astfel încât semnalul la ieşirea filtrului $y(n)$ să fie în modul subunitare, în condiţiile precizate pentru semnalul de intrare $x(n)$.

$$H_s(z) = s_0 H(z)$$

2. Scalarea semnalului are drept scop reducerea probabilităţii depăşirii în nodurile interne ale filtrului. Aceasta se realizează reducând semnalul prin multiplicarea cu o constantă subunitară. Acest tip de scalare trebuie compensată în final, astfel încât funcţia de transfer a filtrului să nu se schimbe.

Există mai multe tipuri de scalare. În lucrarea de faţă se utilizează numai regulile L_1 şi L_∞.

Pentru fiecare din nodurile care trebuie analizate $m \in [1, M]$, se determină coeficienţii K_m cu relaţia:

$$K_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left| h_{in,m}[k] \right|$$

Scalarea se face cu un majorant al acestei sume în cazul regulii L_1 sau cu

$$H_m = \max \left| H_{in,m}\left(e^{j\underline{\omega}}\right) \right|$$

în cazul regulii L_∞. În relația de mai sus $H_{in,m}(z)$ este funcția de transfer de la nodul de intrare la nodul notat cu m n interiorul schemei.

- dacă $K_m \leq 1$ în nodul respectiv nu poate apare depăşirea .
- dacă $K_m > 1$ se notează cu $s_m = K_m^{-1}$.

În final se ia drept coeficient de scalare

$$s = \min\{s_1, s_2, \quad ... \quad s_m\}$$

În cazul filtrelor realizate în forma directă 2, dacă s-a efectuat scalarea funcției de transfer nu mai trebuie analizată posibilitatea depăşirilor la ieşirea sumatoarelor şi multiplicatoarelor din zona nerecursivă a schemei.

E1. *Exerciții:*

1. Se consideră funcția de transfer

$$H(z) = \frac{0,179035 - 0,102306\ z^{-1} + 0,255769\ z^{-2} - 0,102306\ z^{-3} + 0,179035\ z^{-4}}{1 - 1,760579\ z^{-1} + 1,534405\ z^{-2} - 0,844378\ z^{-3} + 0,318264\ z^{-4}}$$

1.1. Scalați funcția $H(z)$ în sensul L_∞ cu ajutorul programului MATLAB.

În acest scop se creează matricele linie **a** şi **b**, care conțin coeficienții polinoamelor de la numitorul, respectiv numărătorul funcției de transfer H(z).

Caracteristica $H(e^{j\omega})$ (notată prin **h**) şi valorile corespunzătoare ale frecvenței unghiulare (notată prin **w**) se determină în 512 puncte echidistante din domeniul $\omega \in [0,\pi)$ folosind funcția:

```
[h,w]=freqz(b,a);
```

Coeficientul $k_0 = \max|H(e^{j\omega})|$ cu care trebuie realizată scalarea se determină astfel:

```
k0=max(abs(h))
```

Dacă $k_0 > 1$ se ia $s_0 = 1/k_0$ şi $H_s(z) = s_0 H(z)$. Scalarea se realizează prin amplificarea coeficienților numărătorului cu s_0, respectiv

```
bs=b/k0;
```

1.2. Desenați o schemă a filtrului $H_s(z)$ în forma directă 2. Scrieți ecuațiile cu diferențe finite corespunzătoare.

1.3. Descompuneți funcția $H_s(z)$ în produs de două funcții de grad 2:

$$H_s(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

Descompunerea nu este unică. Din considerente legate de minimizarea zgomotului de cuantizare în condițiile scalării pentru evitarea depăşirii capacității registrelor, <u>se grupează fiecare pereche de poli cu perechea cea mai apropiată de nuluri</u>.

Din aceleaşi motive, la realizarea în cascadă, celulele de ordinul 2 trebuie asezate <u>în ordine crescătoare a selectivității</u>. Caracterul selectiv al filtrelor se va aprecia vizualizând caracteristica amplitudine-frecvență, determinată pentru fiecare celulă prin utilizarea funcției **freqz**.

Rădăcinile **ra** şi **rbs** se determină cu ajutorul funcției **roots**:

```
ra=roots(a), rbs=roots(bs)
```

Vizualizarea zerourilor **rbs** şi a polilor **ra** pentru funcția complexă H(z) se face cu ajutorul funcției **zplane**.

După selectarea <u>perechilor complex conjugate</u> de zerouri şi respectiv de poli în vectorii **rb1, rb2, ra1, ra2,** în modul menționat mai sus, de exemplu:

`rb1=rbs(3:4), rb2=rbs(1:2),` etc.

se determină coeficienții polinoamelor **b1, b2, a1, a2** de la numitorul şi respectiv numărătorul funcțiilor $H_1(z)$ şi $H_2(z)$ cu ajutorul funcției **poly:**

`b1=poly(rb1),` etc.

Prin operațiile de mai sus se obțin polinoame având termeni liberi de valoare unitară. La numitor aceasta nu creează probleme deoarece, oricum termenul liber era $a_0 = 1$. La numărător s-ar obține însă o diferență dată de un factor multiplicativ egal cu termenul liber b_0 al numărătorului funcției

$$H(z) = b_0 H_1'(z) H_2'(z)$$

unde $H_1'(z)$ şi $H_2'(z)$ sunt funcțiile de transfer obținute după factorizare. Acest factor se poate determina ca fiind primul coeficient al polinomului de la numărător **bs(1)**. Acest termen se va împărți la rândul său în două, alocând câte o parte pentru fiecare funcție obținută după factorizare.:

$$b_0 = c_1 c_2, \quad H_1(z) = c_1 H_1'(z), \quad H_2(z) = c_2 H_2'(z)$$

astfel încât $H_{1,2}'(z)$ să fie scalate în sensul L_∞. Pentru aceasta se va evalua valoarea $k_1 = \max\left|H_1'(z)\right|$ folosind instrucțiunile **freqz** şi **max** şi se va lua $c_1 = 1/k_1$. Valoarea lui c_2 se determina din relația $c_2 = b_0 / c_1$.

În final, pentru ca noua structură să corespundă funcției H(z) este necesară o amplificare a ieşirii cu valoarea $k_0 = \dfrac{1}{s_0}$, unde s_0 este coeficientul de scalare determinat la punctul 1.1.

1.4. Desenați structura în cascadă corespunzătoare.

1.5. Scalați structura obținută în sensul lui L_∞.

Pentru aceasta va trebui căutat, pentru fiecare nod *m*, susceptibil de a conduce la o depăşire, valoarea lui $k_m = \max\left|H_{in,m}\left(e^{j\omega}\right)\right|$, unde $H_{in,m}(z)$ este funcția de transfer de la intrare la nodul *m*.

În acest scop se determină expresia funcției de transfer $H_{in,m}(z)$ pe baza schemei desenate la punctul anterior. Pentru determinarea lui k_m se vor folosi operațiile aritmetice şi de atribuire uzuale pentru constituirea funcțiilor de transfer respective, şi funcțiile **freqz** şi **max** pentru determinarea maximului, similar punctului 1.1. (În utilizarea operațiilor de atribuire se ține cont că, spre exemplu, **b1(1)** este termenul liber al numărătorului funcției $H_1'(z)$ **b1(2)** este coeficientul termenului în z^{-1} al aceluiaşi polinom, etc. Nefolosirea operațiilor de atribuire şi reintroducerea manuală a coeficienților folosind un număr redus de zecimale poate produce erori de calcul).

Nodurile susceptibile a conduce la depăşiri sunt ieşirile sumatoarelor din buclele de reacție şi ieşirile multiplicatoarelor din aceleaşi bucle dacă respectivii coeficienți sunt de modul supraunitar.

5.2. Efectele cuantizării coeficienților funcției de transfer

Vom studia cazul filtrelor RII. Modificarea coeficienților va conduce la o modificare a poziției polilor şi zerourilor şi, deci, la modificarea funcției de transfer:

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \tag{5.1}$$

Se demonstrează că senzitivitatea unui pol (sau zero) z_i la variația unui coeficient c_j este dată de expresia:

$$\frac{\partial z_i}{\partial c_j}=-\frac{z_i^{N-j}}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N}(z_i-z_k)} \tag{5.2}$$

Se observă că existența unor poli (sau zerouri) apropiați va conduce la o senzitivitate ridicată. De asemenea, pentru z_i de modul subunitar, numitorul expresiei anterioare va fi mai mic cu creşterea ordinului *N*, deci *senzitivitatea creşte odată cu creşterea ordinului filtrului*, senzitivitatea minimă obținându-se pentru ordin 2 şi pentru z_i şi z_k diametral opuşi şi apropiați de cercul unitar.

Rezultă că se obțin senzitivități mai mici folosind *structurile cascadă sau paralel*, în locul unei structuri directe de ordin *N*.

Vom considera în exercițiul următor efectul cuantizării coeficienților asupra răspunsului în frecvență pentru un filtru RII implementat în formele directă, cascadă şi paralel.

E2. *Exerciții*

Fie funcția de transfer:

$$H(z)=\frac{(z-0.9e^{j\cdot 0.95\cdot\pi/4})(z-0.9e^{-j\cdot 0.95\cdot\pi/4})(z-0.9e^{j\cdot 1.05\cdot\pi/4})(z-0.9e^{-j\cdot 1.05\cdot\pi/4})}{(z-0.95e^{j\pi/4})(z-0.95e^{-j\pi/4})(z-0.9e^{j\pi/4})(z-0.9e^{-j\pi/4})}$$

1. Determinați coeficienții polinoamelor de la numărător şi numitor şi reprezentați poziția polilor şi a zerourilor şi răspunsul în frecvență.

2. **Efectul cuantizării coeficienților pentru forma directă**.

a) Cuantizați (prin rotunjire cu saturație) coeficienții funcției de transfer pe 12, 10, 8, 6 şi 4 biți. Notați valorile obținute în fiecare caz.
b) Reprezentați poziția polilor şi a zerourilor şi răspunsul în frecvență.

Funcția cuantizorului prin rotunjire cu saturație este:

$$f(x)=\begin{cases}\Delta\cdot\left[x/\Delta+0.5\right], & -1\le x<1\\ 1-\Delta, & x\ge 1\\ -1, & x<-1\end{cases}$$

unde Δ este pasul de cuantizare pentru o reprezentare în virgulă fixă pe N biți:

$$\Delta=2^{-(N-1)}$$

Acesta poate fi implementat în Matlab cu funcția:

```
function q=cuantizor(x,N)
xmax=max(abs(x));
x=x/xmax;
delta=2^(-N+1);
q=delta*round(x/delta);
q=min(1-delta,q);
q=max(-1,q);
q=q*xmax;
```

De exemplu dacă `a` este vectorul coeficienților numitorului, obținerea coeficienților cuantizați pe N biți se poate face cu instrucțiunea:

```
ac=cuantizor(a,N)
```

Comparaţi răspunsul în frecvenţă al filtrului cu coeficienţii cuantizaţi şi necuantizaţi. Câţi biţi sunt necesari pentru reprezentarea coeficienţilor aşa încât această limitare să aibă un efect neglijabil asupra caracteristicii de amplitudine?

3. **Efectul cuantizării coeficienţilor pentru structura cascadă**.

a) Determinaţi structura cascadă pentru funcţia de transfer dată.
b) Cuantizaţi coeficienţii fiecărei funcţii de transfer din structură pe 12, 10, 8, 6 şi 4 biţi. Notaţi valorile obţinute în fiecare caz.
c) Reprezentaţi poziţia polilor şi a zerourilor pentru fiecare secţiune a structurii cascadă (cu coeficienţii cuantizaţi).
d) Calculaţi funcţia de transfer globală obţinută prin înmulţirea celor două funcţii de transfer cu coeficienţii cuantizaţi.

Obs. Înmulţirea a două polinoame se poate face folosind convoluţia. Dacă vectorii `a1` şi `a2` au coeficienţii celor două polinoame, atunci

```
a=conv(a1,a2)
```

va avea coeficienţii polinomului produs.

e) Reprezentaţi poziţia polilor şi a zerourilor şi răspunsul în frecvenţă global şi comparaţi rezultatele cu cele obţinute pentru forma directă.

Pe câţi biţi pot fi reprezentaţi coeficienţii aşa încât această limitare să aibă un efect neglijabil asupra caracteristicii de amplitudine?

4. **Efectul cuantizării coeficienţilor pentru structura paralel**.

a) Determinaţi structura paralel pentru funcţia de transfer dată.
b) Cuantizaţi coeficienţii fiecărei funcţii de transfer din structură pe 12, 10, 8, 6 şi 4 biţi. Notaţi valorile obţinute în fiecare caz.
c) Reprezentaţi poziţia polilor şi a zerourilor pentru fiecare secţiune a structurii paralel (cu coeficienţii cuantizaţi).
d) Calculaţi funcţia de transfer globală obţinută prin sumarea funcţiilor de transfer cu coeficienţii cuantizaţi şi reprezentaţi răspunsul global în frecvenţă.

Obs. Funcţia Matlab **residuez** poate fi aplicată în două sensuri:

```
[R,P,K]=residuez(B,A)
```

descompune în fracţii simple funcţia $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$

```
[B,A]=residuez(R,P,K)
```

reface funcţia de transfer $H(z)$ din descompunerea în fracţii simple.

Astfel, pentru obținerea descompunerii în structura paralel cu coeficienți reali, se poate aplica următoarea metodă (numai dacă polii sunt ordonați în perechi complex conjugate).

```
[r,p,k]=residuez(b,a)
[b1,a1]=residuez(r(1:2),p(1:2),[])
[b2,a2]=residuez(r(3:4),p(3:4),[])
```
etc...

Dacă, după cuantizarea coeficienților funcțiilor de transfer de ordin 2 şi a termenului liber k, coeficienții obținuți sunt: `bc1`, `ac1`, `bc2`, `ac2` şi `kc`, obținerea funcției globale de transfer se poate face printr-o procedură similară:

```
[r1,p1,k1]=residuez(bc1,ac1)
[r2,p2,k2]=residuez(bc2,ac2)
[bc,ac]=residuez([r1;r2],[p1;p2],kc)
```